Tema 7 :Series de potencias

Se llama serie potencial a una serie funcional de la forma $a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n+....$
En toda serie entera existe un cierto valor tal que la serie converge para todo x existente para un cierto valor. $\forall x \in (-R, R)$, para calcular este intervalo se utilizan los criterios de Dalembert o del cociente, Cauchy o de la raíz

Desarrollo en serie de Taylor

$x = a$

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ...+ \frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n + ...$$

Desarrollo en serie de Mc Laurin : Es igual que Tailor pero con x = 0

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ...+ \frac{f^{n)}(0)}{n!}x^n + ...$$

Resto de Lagrange un polinomio de Taylor de grado n :

$$Rn = \frac{f^{n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Serie Binómica

$$(1+x)^m = 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \binom{m}{3}x^3 + \binom{m}{4}x^4 + ...+ \binom{m}{n}x^n$$

rango convergencia [-1,1]

Operaciones con series de potencias Dado $f(x) = \sum a_n x^n$ y $g(x) = \sum b_n x^n$

$f(k\cdot z) = \sum a_n k^n z^n$ $\quad$ $f(x^p) = \sum a_n k^{np}$

$f(x) \pm g(x) = \sum (a_n \pm b_n) x^n$ $\quad$ $f(x) \cdot g(x) = (\sum a_n x^n)(\sum b_n x^n)$

Estas operaciones pueden cambiar el intervalo de convergencia.
Si es una suma el intervalo es la unión de los intervalos.

$$\frac{1}{x} = 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + (x-1)^4 - ....+ (-1)^n (x-1)^n \qquad \mathbf{0 < x < 2}$$

$$\ln x = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} - ....+ \frac{(-1)^{n+1}(x-1)^n}{n} \qquad \mathbf{0 < x \le 2}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ...+ \frac{x^n}{n!} \qquad \mathbf{-00 < x < 00}$$

$$\operatorname{sen}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...+ \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \mathbf{-00 < x < 00}$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ...+ \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \qquad \mathbf{-00 < x < 00}$$

$$ar\cot g(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ...+ \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \qquad \mathbf{-1 \le x \le 1}$$

$$ar\operatorname{sen}(x) = x + \frac{x^3}{2\bullet 3} + \frac{1\bullet 3x^5}{2\bullet 4\bullet 5} + \frac{1\bullet 3\bullet 5x^7}{2\bullet 4\bullet 6\bullet 7} + ...+ \frac{(2n)^n x^{2n+1}}{(2^n n!)^2(2n+1)} \qquad \mathbf{-1 \le x \le 1}$$

$$(1+x)^k = 1 + kx + \frac{k(k-1)x^2}{2!} + \frac{k(k-1)(k-2)x^3}{3!} + \frac{k(k-1)(k-2)(k-3)x^4}{4!} \qquad \mathbf{-1 \le x \le 1}$$

© Juan Carlos de la Cruz Acedo