Tema 1 : Sucesiones

Es una aplicación de los números naturales sobre los reales.

Sucesión acotada : $\forall n \in N \Rightarrow \exists c \in R \,/\, a_n \leq c$

Una serie converge cuando su límite existe, será divergente cuando su límite sea $\pm\infty$.

Toda sucesión convergente está acotada y el valor de convergencia es la cota.

Carácter de una sucesión :

- Convergente : si el límite del termino general es finito
- Divergente : si el límite del termino general es + o - infinito
- Oscilante : si carece de límite (no es ninguna de las anteriores)

MONOTONIA $\quad \forall n \in N \Rightarrow a_{n+1} > a_n$: creciente

$\forall n \in N \Rightarrow a_{n+1} < a_n$: decreciente

Si no se verifican estas dos condiciones son oscilantes

Para estudiar su monotonía

$$\forall n \in N \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n}\begin{cases} >1 \Rightarrow Creciente \\ <1 \Rightarrow Decreciente \\ =1 \Rightarrow Iguales \end{cases} \qquad a_n - a_{n+1}\begin{cases} >0 \Rightarrow creciente \\ <0 \Rightarrow decreciente \\ =0 \Rightarrow iguales \end{cases}$$

Para calcular los límites podemos utilizar todo menos L´Hopital.

Comparación de infinitos : $\mathrm{Log}_b\, n < n < n^a < K^n < n\,! < n^n$

Criterio de STOLZ (bueno para eliminar factoriales o términos infinitos con relación)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} \quad \text{Y} \quad \lim_{n\to\infty} a_n^{\frac{1}{b_n}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^{\frac{1}{b_{n+1}-b_n}}$$

Solo si se cumple : $\{b_n\}$ es monótona creciente con Lim $\{b_n\} = \pm\infty$ $\quad$ <u>Ó</u>

$\{b_n\}$ es monótona creciente y lim $\{a_n\}$ = Lim $\{b_n\} = 0$.

Comparación con otras sucesiones

Dado a_n En el que no sabemos Lim a_n , Si hay un $b_n >= a_n$ en el que el Lim $b_n = K$ y también Hay un $c_n <= a_n$ en el que el Lim $c_n = K$ entonces también el Lim a_n es K.

Teorema : Sean a_n y b_n dos sucesiones de números reales tales que $a_n > 0$ para todo n perteneciente a los números reales

Si : $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ $\;y\;$ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0 \;\; o \;\; \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$ $\qquad$ Entonces $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)^{\frac{1}{b_{n+1}-b_n}} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n^{\frac{1}{b_n}}$