Tema 2 : Series

Dada la sucesión $\{a_n\}$ la serie formada por los términos de dicha sucesión se representa como : $\sum a_n$ y corresponde a la suma de todos los términos de la sucesión.

Carácter de una serie.

- Convergente : Cuando la suma es un número real.
- Divergente : Cuando la suma da + o - infinito.
- Oscilante : Cuando no es ninguna de las anteriores.

Suma de una serie geométrica. $S_n = a + ar^1 + ar^2 + ar^3 + ...+ ar^{n-1} + ar^n + ar^{n+1}$

- $|R| < 1$ Serie convergente
- $R \leq -1$ Serie oscilante
- $R \geq 1$ Serie divergente

$$Suma = \frac{a_1 - a_1 R^n}{1 - R}$$

Propiedades generales de las series numéricas

1. $\sum a_n = S$ entonces $\sum K\, a_n = K\, S$ Solo si k es nº real distinto de 0
   Si $\sum a_n$ es divergente no podemos saber nada.

2. Al suprimir añadir o modificar un número finito de términos de una serie el carácter de una serie no se modifica, si bien cuando la serie sea convergente la suma puede serse alterada.

Condición necesaria para la convergencia: Sea : $\sum a_n$ Calculamos : $\lim_{n\to\infty} a_n = k$

- Si k = 0 la serie converge o diverge (Continuar el problema)
- Si k ≠ 0 la serie diverge (Fin del problema)

Convergencia de series con solo términos positivos

A. **Teorema 1 :** Toda serie de términos positivos es convergente o divergente, pero nunca oscilante.
B. **Teorema 2 :** Alterando arbitrariamente el orden de los términos, descomponiendo arbitrariamente cada uno de los sumandos, no se altera el carácter de la serie, ni varía su suma.

1. **Criterio de Cauchy o de la Raíz.** Calculamos : $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = k$
   - Si k < 1 la serie converge (Fin)
   - Si k > 1 la serie diverge (Fin)
   - Si k = 1 no sabemos (Continuar)

   Funciona con : $(\ )^n$, $(\ )^{p(n)}$
2. **Criterio de D'Alembert o del cociente.** Calculamos : $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n-1}} = k$
   - Si k < 1 la serie converge (Fin)
   - Si k > 1 la serie diverge (Fin)
   - Si k = 1 no sabemos (Continuar)

   Funciona con : k^n , n ! , Semifactoriales (1·3·5 · · · · · (2n+1)).

3. **Criterio de Raabe.** Calculamos : $\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_n}{a_{n-1}}\right) = k$
   - Si k < 1 la serie diverge (Fin).
   - Si k > 1 la serie converge (Fin).
   - Si k = 1 no sabemos (Continuar).

   Funciona cuando el criterio de la raíz o el cociente sale 1
4. **Criterio del Logaritmo.** Calculamos : $\lim_{n\to\infty} \frac{Log\left(1/a_n\right)}{\log(n)} = k$
   - Si k < 1 la serie diverge (Fin).
   - Si k > 1 la serie converge (Fin).
   - Si k = 1 no sabemos (Continuar).

   Nota : El logaritmo puede estar en cualquier base.
5. **Criterio de comparación.** Sea : $\sum a_n \leq \sum b_n$
   - Si $\sum a_n$ diverge entonces $\sum b_n$ diverge.
   - Si $\sum b_n$ converge entonces $\sum a_n$ converge.
6. **Criterio de comparación por paso al límite.**

   Buscamos el carácter de $\sum a_n$ y sabemos el carácter de $\sum b_n$. Entonces : $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$
   - Si $k \neq 0$ y $k \neq \infty$ entonces ambas series tienen el mismo carácter.
   - Si k = 0 y si $\sum b_n$ converge entonces $\sum a_n$ converge.
   - Si $k = \infty$ y si $\sum b_n$ diverge entonces $\sum a_n$ diverge.

   Series de comparación
   - S. Geométrica : $a + a r + a r^2 + a r^3 + ... + a r^n$
     - Si $|r| < 1$ serie convergente
     - Si $|r| \geq 1$ serie divergente
   - S. Armónica general : $1/(1^p) + 1/(2^p) + 1/(3^p) + ... + 1/(n^p)$
     - Si p > 1 serie convergente
     - Si $p \leq 1$ serie divergente
7. **Criterio de Prinsheim :** Calculamos : $\lim_{n\to\infty} n^\alpha a_n = k \ que \quad cumpla \begin{cases} k \neq 0 \\ y \\ k < \pm\infty \end{cases}$
   - Si $\alpha > 1$ la serie converge
   - Si $\alpha \leq 1$ la serie diverge

   Nota : Criterio de comparación con la serie armónica general camuflado

Convergencia de series con términos cualesquiera

A. **Sea :** $\sum a_n$. Estudiamos : $\sum |a_n|$ y $\sum a_n$
- Si $\sum |a_n|$ converge (sus términos son positivos) decimos que $\sum a_n$ converge absolutamente y que, por lo tanto, converge (Fin)
- Si $\sum |a_n|$ diverge entonces puede ocurrir que:
  $\sum a_n$ converge. Se dice que la serie converge condicionalmente.
  $\sum a_n$ diverge. La serie es incondicionalmente divergente.

B. En toda serie absolutamente convergente se puede alterar arbitrariamente el orden de los términos sin que altere su suma.

C. En toda serie es absolutamente convergente que tenga valores positivos y negativos la serie de términos positivos y la serie de términos negativos serán convergentes por separado.

1. **Teorema de Leibniz :** una serie alternada es convergente si se cumple las siguientes condiciones :
   - Es monótona decreciente en valores absolutos y
   - El limite en el infinito es 0 (Lim $a_n = 0$)
2. **Criterio de Dirichet** (Para series alternadas) Dado $\sum a_n = \sum b_n c_n$
   $\sum a_n$ converge si se cumplen las siguientes condiciones, de no cumplirse es divergente :
   - Si b_n está totalmente acotada y
   - $\{c_n\}$ una sucesión monótona decreciente que convergen en 0
3. **Criterio de Abel.** Dado $\sum a_n = \sum b_n c_n$, entonces $\sum a_n$ converge si :
   - $\sum b_n$ de números reales, converge.
   - $\{c_n\}$ es una sucesión monótona decreciente y acotada.

Operaciones con series

1. Dadas $\sum a_n$ y $\sum b_n$ convergentes de sumas a y b respectivamente entonces se verifica que : $\sum a_n \pm b_n$ es también convergente y su suma es : $a \pm b$.

2. Sea la serie $\sum p_n$ formada por :
$p_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + a_3 b_{n-2} + \ldots + a_{n-2} b_3 + a_{n-1} b_2 + a_n b_1$
La serie así definida en la que $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son convergentes y una al menos es absolutamente convergente, en ese caso la serie $\sum p_n$ es convergente y su suma es $a \cdot b$.