Tema 6 : Derivabilidad

Dado y = f(x) en un intervalo I se define la derivada de f(x) representado como f'(x) como : $F'(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\Delta f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

Si este límite existe diremos que la función es derivable

TEHOREMA : Toda función derivable en x = x_0 es continua en dicho punto (Ojo al contrario ¡¡¡ NO !!!!)

Tabla de derivadas

dadas u, v = f(x)   y k, m, a = constantes

PRIMITIVAS	DERIVADAS	PRIMITIVAS	DERIVADAS
y = k	y' = 0	y = tg(u)	$y' = u'/\cos^2 u$ $y' = u'\,(1 + tg^2 u)$
y = k · u	y' = k · u'	y = sec (u)	y' = sec(u) · tg(u) ·u'
y = u + v	y' = u' + v'	y = cosec(u)	y' =-cosec(u)·cotg(u)·u'
y = u · v	y' = u' · v + u · v'	y = cotg(u)	$y' = -u'/sen^2 u$ $y' = u'\,-(1 + cotg^2 u)$
$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$	y = arcsen (u)	$y' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$y = u^m$	$y' = m \cdot u^{m-1} \cdot u'$	y = arccos(u)	$y' = \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$y = \sqrt[n]{u}$	$y' = u' \big/ n \cdot \sqrt[n]{u^{n-1}}$	y = arctg(u)	$y' = \frac{u'}{1+u^2}$
$y = \sqrt{u}$	$y' = u' \big/ 2 \cdot \sqrt{u}$	y = arccotg(u)	$y' = \frac{-u'}{1+u^2}$
y = L u	$y' = u' \big/ u$	y = senh(u)	y' = cosh(u) · u'
$y = \lg_a u$	$y' = L_a e \frac{u'}{u} = \frac{1}{La} \frac{u'}{u}$	y = cosh (u)	y' = senh (u) · u'
$y = a^u$	$y' = a^u \cdot La \cdot u'$	y = tgh (u)	$y' = \frac{u'}{\cosh^2 u}$
$y = u^v$	$y' = u^v\,(v'\ \ Lu + v\ \ u'/u)$	y = argcosh(u)	$y' = \frac{u'}{\sqrt{u^2-1}}$
y = sen(u)	y' = cos(u) · u'	y = argsenh(u)	$y' = \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}}$
y = cos(u)	y' = -sen(u) · u'	y = argtgh(u)	$y' = \frac{u'}{1-u^2}$

Derivadas laterales

Sea f(x) una función definida en un intervalo abierto y sea x_0 un punto generico de este intervalo, llamamos derivada en x_0 por la derecha o izquierda y se representa :

Por la derecha de x_0   **Por la izquierda de x_0**

$$F'_{+}(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \qquad F'_{-}(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0-h) - f(x_0)}{-h}$$

Es condición necesaria y suficiente para que exista derivada en un punto que existan derivadas laterales y que coincidan.

Casos en los que no hay derivada:

- **Punto anguloso :** Ambas derivadas existen y son finitas, pero no coinciden.
- **Punto de Inversión :** Ambas derivadas laterales son + o - con el mismo signo a la vez.
- **Punto de retroceso :** Si son infinito pero con signo distinto.

Derivada de la función inversa

Si y = f(x) que cumple que es derivable en x_0 y además que $f'(x_0)$ no es cero entonces cumple :

Que la función inversa f $^{-'}$(y) definida como : $f^{-}{}'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$

Es derivable en x_0, de hecho son continuas en el mismo intervalo

Derivada de funciones paramétricas

Cuando no se puede despejar o es muy complicado, y respecto de x se hace la derivación implicita. Pasos :

1- Se deriva con x y con y independiente, pero las que derivemos con y ponemos dy/dx.
2- Agrupo en un lado los términos con dy/dx
3- Dejo solo el dy/dx y lo demás lo paso dividiendo.

Derivadas sucesivas

Para calcular esto de lo que se trata es derivar sucesivamente pero se puede utilizar Leibniz

Dado u = f(x), v = g(x), dos funciones que admiten derivadas sucesivas.

$$(u \bullet v)^{(n} = u^{(n} + \binom{n}{1} u^{(n-1} \bullet v' + \binom{n}{2} u^{(n-2} \bullet v'' + \binom{n}{3} u^{(n-3} \bullet v''' + \dots\dots + \binom{n}{n-1} u' \bullet v^{(n-1} + u \bullet v^{(n}$$

RECOMENDACIONES :

- Si tienes una función racional se tiene que descomponer primero, de no tener nada en el numerador se trabaja mucho mejor con subiéndolo todo de la siguiente forma : $1/x = x^{-1}$.
- Se suele pasar todo a sen o cos, sumandole $\pi/2$